Introduktion till dynamiska system, Period 3, 2012

Introduction to Dynamical Systems

Hemarbete B

Assignment B

Hemarbete B genomgås på klass **tisdagen den 28 februari, kl. 13-14**. Då berättar ni ungefär hur ni har tänkt lösa uppgiften. Ni får gärna samarbeta om projektet men den obligatoriska skriftliga rapporten är individuell. Den skall inlämnas senast **fredagen den 16 mars**.

The Assignment B will be discussed in class on **Tuesday, February 28, 13-14**. There you give a rough sketch of your solution method. Cooperation with other participants is allowed, even encouraged. However, everybody is to hand in an individual written report. Deadline is **Friday, March 16**.

1.

Stabilitetsanalys av en linjär differensekvation

För vilka värden på a och b är origo en attraktor för systemet

$$f(x) = \begin{pmatrix} a & b \\ 1 & 0 \end{pmatrix} x, \ \ x_0 \in \Re^2.$$

Illustrera åtminstone fyra väsentligt olika fall.

Ref.: Devaney, *op. cit.*, Kap. 2.

S. Bjon m. fl., *Numerisk och diskret matematik*, Andra uppl., Sigma vid Åbo Akademi 1989, Kap. 5 (Linjära differensekvationer).

Se ocks kommentaren efter den engelska versionen nedan.

Stability of a Linear Difference Equation

For what values of a and b is the origin an attractor of the system

$$f(x) = \begin{pmatrix} a & b \\ 1 & 0 \end{pmatrix} x, \ \ x_0 \in \Re^2.$$

Give examples of at least four qualitatively different cases. Show the orbits graphically.

Ref.: Devaney, *op. cit.*, Chapter 2.

S. Bjon m. fl., *Numerisk och diskret matematik*, Andra uppl., Sigma vid Åbo Akademi 1989, Chapter 5 (Linjära differensekvationer).

Comment: The one-dimensional linear difference equation of second order

$$(*) \qquad x_{n+2} = ax_{n+1} + bx_n, \ \ n = 0, 1, 2, \ldots$$

(with initial values x_0 and x_1) is conveniently studied by converting the problem to a two-dimensional linear system of first order of the form above.

Thus the problem may also be phrased: For what values of a and b does the solution of $(*)$ converge to 0 for all initial values.

In statistical time series analysis, a similar study is made to determine the region of stability (meaning: How should a and b be chosen to guarantee the existence of a stationary probability measure?) of the *linear autoregressive process of order two, AR(2)*

$$X_{n+2} = aX_{n+1} + bX_n + \xi_{n+2}, \ \ n = 0, 1, 2, \ldots$$

where the ξ's are independent identically distributed random variables, usually taken to be normally distributed with mean 0.

Var god vänd! - Please turn over!

2.

Hénonavbildningen

Bestäm så exakt som möjligt den stabila och den instabila mångfalden till en Hénonavbildning $H_{a,b}$ (med $b = -0,3$ och a tagen mellan 1,2 och 1,45) i en av dess fixpunkter.

$$H_{a,b}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a - by - x^2 \\ x \end{pmatrix}$$

Visa att avbildningen har en attraherande period för vissa värden på a. Visa också att banan det för vissa värden på a blir en Cantorliknande tvådimensionell mängd. Illustrera grafiskt.

The Hénon Map

Determine as accurately as possible the stable and unstable manifolds of an Hénon map (use $b = -0.3$ and choose a between 1.2 and 1.45) at one of its fixed points.

$$H_{a,b}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a - by - x^2 \\ x \end{pmatrix}$$

Show also that there are values of a for which the map has an attracting period. Show also that for some a we get Cantor-like twodimensional orbits. Illustrate.